ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ (Π.Ε.Τ) | 3ο ΘΕΜΑ

Όπως στη ΒΟΠ έτσι και εδώ, έχουμε 2 ειδών προβλήματα

ΣΥΝΕΧΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

Δοθείσης $f \in C[-1,1]$ και ολοκληρώσιμης κατά Riemann συνάρτησης βάρους w, θετικής στο $[-1,1]$ εκτός από πεπερασμένο σύνολο σημείων όπου $w(x)=0$, αναζητούμε πολυώνυμο $q_n^* \in P_n$ τέτοιο ώστε:

$$\|f-q_n^*\|_2 = \left[\int_{-1}^{1} |f-q_n^*|^2 \cdot w(x)\, dx\right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} [f-q_n]^2 \cdot w(x)\, dx\right]^{1/2} \leq \|f-p\|_2$$

$\forall p \in P_n$ και $\|f-q_n^*\|_2 = \|f-p\|_2 \Leftrightarrow p = q_n^*$

ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ :

Δοθείσης f ορισμένης στο $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ και συνάρτησης βάρους w, θετικής στο X_m, αναζητούμε πολυώνυμο $q_n^* \in P_n$ τέτοιο ώστε:

$$\|f-q_n^*\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - q_n^*(x_i))^2 \cdot w(x_i)\right)^{1/2} \leq \|f-p\|_2, \ \forall p \in P_n$$

και $\|f-q_n^*\|_2 = \|f-p\|_2 \Leftrightarrow q_n^* = p$

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων υπάρχει και είναι μοναδική.

Η Π.Ε.Τ. μπορεί να οριστεί και στο τυχόν $[a,b]$ απλώς όπως και προηγουμένως θα το μετασχηματίσουμε στο $[-1,1]$ μέσω του μετασχηματισμού:

$$x = \frac{b-a}{2} t + \frac{b+a}{2}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $f, g \in C(I)$ και w συνάρτηση βάρους

Εσωτερικό γινόμενο (στη συνεχή περίπτωση)

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x) g(x) w(x)\, dx.$$

Αν $f, g \in X_m$ και w συνάρτηση βάρους

Εσωτερικό γινόμενο (στη διακριτή περίπτωση)

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) g(x_i) w(x_i)$$

Να πούμε ότι f, g ορθογώνιες $\Leftrightarrow (f,g)=0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΣΥΝΕΧΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ):

Έστω $f \in C(I)$ και w συνάρτηση βάρους στο $I \subseteq \mathbb{R}$

Το $q_n^* \in P_n$ είναι Π.Ε.Τ. της f ανν

$$(f-q_n^*, p) = \int_{-1}^{1} (f(x)-q_n^*(x))\, p(x)\, w(x)\, dx = 0, \ \forall p \in P_n$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ)

Έστω f στο X_m και w συνάρτηση βάρους στο X_m

Το $q_n^* \in P_n$ είναι ΠΕΤ της f αν.ν

$$(f-q_n^*, p) = \sum_{i=1}^{m} (f(x_i) - q_n^*(x_i))\, p(x_i) \cdot w(x_i) = 0, \ \forall p \in P_n$$

1) ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

α) ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ:

Έστω $q_n^* \in P_n$ η Π.Ε.Τ. της f

Τότε $(f-q_n^*, p) = 0 \Leftrightarrow (q_n, p) = (f, p), \ \forall p \in P_n$ (1)

Θα προσδιορίσουμε το q_n^* παίρνοντας ως p το πιο απλό πολυώνυμο: x^i, $\forall i=0,1,\ldots,n$ και θεωρούμε τη βάση των μονωνύμων $\{x^0=1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ ώστε η προσέγγιση q_n^*

εκφράζεται με το γραμ. συνδυασμό

$$q_n^*(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n.$$

Έτσι, η σχέση (1) γίνεται:

$$(q_n^*, x^i) = (f, x^i), \forall i \Leftrightarrow (\xi_0 + \xi_1 x + \dots + \xi_n x^n, x^i) = (f, x^i), \forall i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1, x^i)\xi_0 + (1, x \cdot x^i)\xi_1 + \dots + (1, x^n \cdot x^i)\xi_n = (f, x^i), \forall i$$

Άρα, προκύπτει ένα $(n+1)\times(n+1)$ γραμ. σύστημα

$$A\xi = b$$

όπου:

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

με $a_{ij} = (x^j, x^i) = \int_{-1}^{1} x^{i+j} w(x)\, dx, \quad \forall i,j = 0,1,2,\dots,n$

και $b_i = (f, x^i) = \int_{-1}^{1} f(x) x^i w(x)\, dx, \quad \forall i = 0,1,2,\dots,n$

Αυτό ονομάζεται σύστημα κανονικών εξισώσεων

Ο πίνακας A καλείται HANKEL πίνακας και έχουν κακή κατάσταση για $n \geq 7$

Δηλ. ίδια στοιχεία κατά μήκος των διαγωνίων από κάτω αριστερά προς τα πάνω δεξιά.

Άσκηση 1:

Να βρεθεί η ΠΕΤ της $f(x) = x^3$ ορισμένης στο [0,1] στον χώρο P_2.

ΛΥΣΗ

Δεν βρισκόμαστε στο [-1,1], άρα χρησιμοποιούμε το γραμμικό μετασχηματισμό:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(t+1)$$

Έτσι, $g(t) = f(x(t)) = \frac{1}{8}(t+1)^3 = \frac{1}{8}(t^3+3t^2+3t+1)$, $t \in [-1,1]$

$$a_{00} = \int_{-1}^{1} 1 \, dt = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \underline{\text{Hankel}}$$

περιττή

$$a_{01} = a_{10} = \int_{-1}^{1} t \, dt = 0$$

άρτια

$$a_{02} = a_{11} = a_{20} = \int_{-1}^{1} t^2 \, dt = 2\int_{0}^{1} t^2 \, dt = \frac{2}{3}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

περιττή

$$a_{12} = a_{21} = \int_{-1}^{1} t^3 \, dt = 0$$

άρτια

$$a_{22} = \int_{-1}^{1} t^4 \, dt = 2\int_{0}^{1} t^4 \, dt = \frac{2}{5}.$$

$$b_0 = (g(t), 1) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(t^3+3t^2+3t+1)\, dt = \ldots = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = (g(t), t) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(t^4+3t^3+3t^2+t)\, dt = \ldots = \frac{3}{10}$$

$$b_2 = (g(t), t^2) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{8}(t^5+3t^4+3t^3+t^2)\, dt = \ldots = \frac{7}{10}$$

Επιλύουμε το σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{10} \\ \frac{7}{10} \end{bmatrix} \overset{\text{Gauss}}{\Rightarrow} [\xi_0, \xi_1, \xi_2] = \left[\frac{9}{20}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right]$$

Άρα, $q_2^*(t) = \frac{9}{20} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{8}t^2$.

Αλλά, $x = \frac{1}{2}(t+1) \Rightarrow t = 2x-1$

Επομένως, $q_2^*(t) = p_2^*(t(x)) = \frac{9}{20} + \frac{3}{8}(2x-1) + \frac{1}{8}(2x-1)^2$, κ.π.ε.τ.

β) ΟΡΘΟΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΥΡΕΣΗ Π.Ε.Τ.

• Βάση ορθογωνίων πολυωνύμων:

Έστω $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ μία βάση ορθογωνίων πολυωνύμων εν P_n.

Θεωρώντας το $q_n^*(x)$ (των Π.Ε.Τ) ίση με:

$q_n^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x)$

Επιλέγουμε αυτή τη φορά ως $p(x) = P_i(x)$, $i=0,1,\dots,n$

Τότε εφόσον ισχύει $(f - q_n^*, p) = 0$ (λόγω ότι η q_n^* είναι ΠΕΤ) έχουμε ότι $(q_n^*, p) = (f, p)$, $p \in P_n$

Άρα, $(\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \dots + \lambda_n P_n(x), P_i(x)) = (f(x), P_i(x))$

$\forall i = 0,1,\dots,n \iff \lambda_0 (P_0, P_i) + \lambda_1 (P_1, P_i) + \dots + \lambda_n (P_n, P_i) = (f, P_i)$

$\forall i = 0,1,\dots,n \overset{\text{ορθογ}}{\iff} \lambda_i (P_i, P_i) = (f, P_i) \iff \boxed{\lambda_i = \dfrac{(f, P_i)}{(P_i, P_i)}, \forall i=0,1,\dots,n}$

Άρα, φθάσαμε στην εύρεση των συντελεστών λ_i του q_n^*, και άρα φθάσαμε στην εύρεση του q_n^* δίχως να χρειάζεται να επιλύσουμε σύστημα. Ουσιαστικώς, η σχέση των λ_i παραπάνω είναι ένα διαγώνιο σύστημα πολύ καλής κατάστασης

• Gram-Schmidt ορθογωνοποίηση

Ουσιαστικά εδώ δεν ξεκινάμε με ορθογώνια βάση αλλά με τυχαία βάση γραμ. ανεξάρτητων πολυωνύμων και έχοντας αυτή ως ένα σύνολο αναφοράς προσπαθούμε να κατασκευάσουμε τη βάση των ορθογωνίων πολυωνύμων. Τι πιο απλό να ξεκινήσουμε με βάση αναφοράς την βάση των μονωνύμων $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$.

Αν υποθέσουμε ότι η ορθογώνια βάση είναι η εξής:
$\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ τότε το μονώνυμο x^i γράφεται ως:

$$x^i = C_0 P_0(x) + C_1 P_1(x) + \dots + C_i P_i(x) \quad (1)$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε βρει τα πρώτα i στοιχεία της βάσης $P_0, P_1, \dots, P_{i-1}$ και θέλουμε να βρούμε για το P_i

Πολ/ζουμε εσωτερικά στην (1) με P_j, $j = 0, 1, \dots, n-1$

$$(x^i, P_j) = C_0 (P_0, P_j) + C_1 (P_1, P_j) + \dots + C_i (P_i, P_j) \overset{\text{ορθογ.}}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow (x^i, P_j) = C_j (P_j, P_j) \Leftrightarrow C_j = \frac{(x^i, P_j)}{(P_j, P_j)}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \ j \le i$$

Άρα, στην (1):

$$\boxed{C_i P_i(x) = x^i - \frac{(x^i, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) - \frac{(x^i, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) - \dots - \frac{(x^i, P_{i-1})}{(P_{i-1}, P_{i-1})} P_{i-1}(x)}$$

όπου ξεκινάμε πάντα με $P_0(x) = 1$ και βρίσκουμε τα υπόλοιπα, και επειδή η ορθογώνια βάση είναι ανεξάρτητη από τους σταθερούς παράγοντες θεωρούμε $C_i = 1$, $\forall i$ και τελικά παίρνουμε:

$$P_i(x) = x^i - \frac{(x^i, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) - \frac{(x^i, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) - \dots - \frac{(x^i, P_{i-1})}{(P_{i-1}, P_{i-1})} P_{i-1}(x)$$

πχ

Στον P_3 ορθογ. βάση: $[-1, 1]$

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - \frac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} \rho_o = x - \frac{\int_{-1}^{1} x \, dx}{\int_{-1}^{1} 1 \, dx} = x$$

$$P_2(x) = x^2 - \frac{(x^2, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) - \frac{(x^2, P_1)}{(P_1, P_1)} P_1(x) = \dots = x^2 - \frac{1}{3}$$

όμοια και το $P_3(x) = \dots = x^3 - \frac{3}{5} x$

Με τη μέθοδο Gram-Schmidt όμως δημιουργούνται ξανά κάποια σφάλματα όταν η είναι αρκετά μεγάλο και αυτό διότι για να υπολογίσουμε τα P_i κάνουμε χρήση όλων των προηγούμενων πολυωνύμων.

- <u>Ορθογωνοποίηση με αναδρομική σχέση τριών όρων:</u>

Έστω στο διάστημα $[-1,1]$ τα πολυώνυμα της βάσης των ορθογωνίων πολυωνύμων $P_0(x)=1$ και $P_1(x)=x$ τα οποία υπολογίζονται με την προηγούμενη μέθοδο.

Θεωρούμε έπειτα την αναδρομική σχέση:

$P_{k+1}(x)=(x-a_k)P_k(x)-\beta_k P_{k-1}(x)\ ,\ \forall k=1,2,\dots,n-1$

Στόχος μας είναι ο προσδιορισμός των a_k,β_k ώστε η βάση που παράγεται να είναι ορθογώνια.

Δηλαδή <u>απαιτούμε</u> $(P_{k+1},P_j)=0\ ,\ \forall j=0,1,\dots,k$

α) Εάν $j<k-1$:

$$(P_{k+1},P_j)=((x-a_k)P_k(x)-\beta_k P_{k-1}(x),P_j)=$$
$$=((x-a_k)P_k(x),P_j)-(\beta_k P_{k-1}(x),P_j)=$$
$$=(xP_k(x),P_j)-a_k\cancelto{0}{(P_k(x),P_j)}-\beta_k\cancelto{0}{(P_{k-1}(x),P_j)}=$$
$$=(P_k(x),xP_j)\overset{j<k-1}{=}(P_k,c_0P_0+c_1P_1+\dots+c_{j+1}P_{j+1})=0$$

για δ.ο $\forall a_k,b_k:(P_{k+1},P_j)=0\Rightarrow P_{k+1}$ ορθ. $P_j\ \forall j<k-1$

β) $j=k$: $(P_{k+1},P_k)=((x-a_k)P_k(x)-\beta_k P_{k-1}(x),P_k)=$

$=(xP_k(x),P_k(x))-a_k(P_k(x),P_k(x))=0$ ανν

$$\boxed{\alpha_k=\frac{(xP_k,P_k)}{(P_k,P_k)}}\ \leftarrow\ \text{τ/ω } (P_{k+1},P_k)=0$$

γ) Εάν $j=k-1$:

$$(P_{k+1}, P_{k-1}) = ((x-a_k)P_k - \beta_k P_{k-1}, P_{k-1}) =$$

$$= (xP_k, P_{k-1}) - a_k \overset{0}{\cancel{(P_k, P_{k-1})}} - \beta_k (P_{k-1}, P_{k-1}) =$$

$$= (xP_k, P_{k-1}) - \beta_k (P_{k-1}, P_{k-1}) = 0 \quad \text{αν.ν}$$

$$\boxed{\beta_k = \frac{(xP_k, P_{k-1})}{(P_{k-1}, P_{k-1})}} \leftarrow \text{Τ/ω } (P_{k+1}, P_{k-1}) = 0.$$

Ο τύπος αυτός είναι ισοδύναμος με τον

τύπο $\beta_k = \dfrac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}$

Αποδ

$$(xP_k, P_{k-1}) = (P_k, xP_{k-1}) = (P_k, c_0P_0 + c_1P_1 + \dots + c_kP_k) =$$

$$= c_0 \overset{0}{\cancel{(P_k, P_0)}} + c_1 \overset{0}{\cancel{(P_k, P_1)}} + \dots + c_k (P_k, P_k) = c_k (P_k, P_k)$$

από την αναδρομική σχέση ο συντελ. μεγ. όρου του P_i είναι 1 άρα $c_k = 1$ και συνεπώς

$$(xP_k, P_{k-1}) = c_k (P_k, P_k) = (P_k, P_k)$$

άρα πράγματι, $\beta_k = \dfrac{(P_k, P_k)}{(P_{k-1}, P_{k-1})}$.

Άσκηση 1 (β'-τρόπος)

Θα βρούμε τον Π.Ε.Τ. μέσω των ορθογωνίων πολυωνύμων με αναδρομική σχέση.

$P_0(x) = 1$ και $P_1(x) = x - \dfrac{(x, P_0)}{(P_0, P_0)} P_0(x) = x - \dfrac{\int_0^1 x\,dx}{\int_0^1 1\,dx} = x - \frac{1}{2}$

Θα βρούμε το P_2 μέσω της αναδρομικής σχέσης:

$$\alpha_1 = \frac{(xP_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_0^1 x(x-\frac{1}{2})^2 dx}{\int_0^1 (x-\frac{1}{2})\, dx} = \frac{1}{2}.$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{1}{12}.$$

Άρα, $P_2(x) = (x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{12} = x^2 - x + \frac{1}{6}$.

άρα βρέθηκε η ορθογώνια βάση $\{1, x-\frac{1}{2}, x^2-x+\frac{1}{6}\}$

και άρα η π.ε.τ. είναι το πολυώνυμο

$$q_n^*(x) = \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1 (x-\tfrac{1}{2}) + \lambda_2 (x^2 - x + \tfrac{1}{6}) \quad \text{όπου}$$

$$\lambda_0 = \frac{(f, P_0)}{(P_0, P_0)} = \frac{\int_0^1 x^3 dx}{1} = \frac{1}{4}.$$

$$\lambda_1 = \frac{(f, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\int_0^1 x^3 (x-\frac{1}{2}) dx}{1/12} = \frac{3/40}{1/12} = \frac{9}{10}.$$

$$\lambda_2 = \frac{(f, P_2)}{(P_2, P_2)} = \frac{\int_0^1 x^3 (x^2-x+\frac{1}{6}) dx}{\int_0^1 (x^2-x+\frac{1}{6})^2 dx} = \frac{1/120}{1/180} = \frac{3}{2}$$

άρα $q_n^*(x) = \frac{1}{4} + \frac{9}{10}(x-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(x^2 - x + \frac{1}{6})$

Σχόλιο

Ένα άλλο εργαλείο για τον υπολογισμό π.ε.τ. είναι τα πολυώνυμα Legendre τα οποία δίνονται από την εξής αναδρομική σχέση:

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots$$

με $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ με μόνη διαφορά από τα υπόλοιπα ορθογώνια πολυώνυμα τον σταθερό παράγ.

2) ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΙΑΚΡΙΤΗΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗΣ

Γενικά τα πράγματα και εδώ είναι όμοια. Θα αναπτύξουμε μόνο τη θεωρία κανονικών εξισώσεων και η ορθογωνοποίηση Gram-Schmidt είναι παρόμοια με προηγουμένως και θα την δούμε σε παραδείγματα/θέματα.

ΣΥΣΤΗΜΑ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ (Σε σύνολο $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$)

Έστω q_n^* π.ε.τ. $\Rightarrow (q_n^*, p) = (f, p),\ \forall p \in P_n$ (1)

Έστω τώρα η βάση $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ του P_n

Άρα, $q_n^* = \zeta_0 + x\zeta_1 + \dots + x^n \zeta_n$ τότε από την (1)

Έχουμε: $(q_n^*, x^i) = (f, x^i)$ όπου $p = x^i$

$\Leftrightarrow (\zeta_0 + \zeta_1 x + \dots + \zeta_n x^n, x^i) = (f, x^i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{n} (x^j, x^i)\zeta_j = (f, x^i) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j}\zeta_j = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) x_k^i$

Άρα έχουμε ένα $(n+1)\times(n+1)$ σύστημα $A\zeta = b$.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \dots & \alpha_{0n} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n0} & \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}, \quad \zeta = [\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n]^T, \quad b = [b_0, b_1, \dots, b_n]^T$$

όπου $\alpha_{ij} = (x^i, x^j) = \sum_{k=1}^{m} x_k^{i+j}$

και $b_i = (f, x^i) = \sum_{k=1}^{m} f(x_k) x_k^i$

Έτσι, $A\zeta = b \Leftrightarrow X \cdot X^T \zeta = X^T \cdot \hat{f} \leftrightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 & \dots & x_m^n \end{bmatrix}$

και $X \in \mathbb{R}^{m, n+1}$ όχι τετραγωνικός

$\hat{f} = [f(x_1), \dots, f(x_m)]^T$

Έτσι, $A\xi = b \Leftrightarrow X^T(X\xi - \hat{f}) = 0$

$$X\xi - \hat{f} = \begin{bmatrix} \xi_0 + \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_1^n - f(x_1) \\ \vdots \\ \xi_0 + \xi_1 x_m + \dots + \xi_n x_m^n - f(x_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n^*(x_1) - f(x_1) \\ q_n^*(x_2) - f(x_2) \\ \vdots \\ q_n^*(x_n) - f(x_n) \end{bmatrix}$$

Το πρόβλημά μας είναι να βρούμε $q_n^* \in P_n$:
$\|f - q_n^*\| < \|f - p\|$, $\forall p \in P_n$ και $p \neq q_n^*$
Δηλ. να βρούμε

$\min_{p \in P_n} \|f - q_n^*\| = \min_{\xi \in \mathbb{R}^{n+1}} \|X\xi - \hat{f}\|$: το γνωστό γραμ. πρόβλημα ελαχ. τετραγ. από την αριθμητική γραμμική άλγεβρα.

Άσκηση 2

Να βρεθεί η Π.Ε.Τ. στον P_2 της $f \in X_4 = \{0,1,2,3\}$

x_i	0	1	2	3
f_i	0	-1	0	3

μέσω του συστήματος κανον. εξισώσ. και να βρεθεί το σφάλμα της μεθόδου.

ΛΥΣΗ

Εφόσον $q^* \in P_2 \Rightarrow q^*(x) = \xi_0 + \xi_1 x + \xi_2 x^2$ (όπως γνωρίζουμε από την θεωρία).

$\alpha_{ij} = (x^i, x^j) = \sum_{k=1}^{4} x_k^{i+j}$ και $b_i = (f, x^i) = \sum_{k=1}^{4} f(x_k) x_k^i$

	$x_k^0 = 1$	x_k	x_k^2	x_k^3	x_k^4	$f(x_k)$	$x_k f(x_k)$	$x_k^2 f(x_k)$
	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
	1	2	4	8	16	0	0	0
	1	3	9	27	81	3	9	27
SUM:	4	6	14	36	98	2	8	26

Άρα, ο πίνακας Hankel είναι:

$$A=\begin{bmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}$$ και το διάνυσμα $b=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix}$

και άρα έχουμε το σύστημα (3×3)

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 26 \end{bmatrix} \overset{Gauss}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, $q^*(x)=-2x+x^2$

Όσο για το σφάλμα (Ας το πάρουμε νόρμα 2):

$$\| f_i-q_i^* \|_2=\| [0-0,-1+1,0-0,3-3]^T \|_2=0.$$

Άρα, βρισκόμαστε στην καλύτερη περίπτωση όπου το q^* είναι πολυώνυμο παρεμβολής της f στα x_i και επίσης είναι και η β.ο.π της f στα x_i (άρα θα έχουμε και εναλλασσόμενο σύνολο σημείων)

Άσκηση 3 (ΘΕΜΑ 3ο ΙΟΥΝΙΟΣ 2014)

Να βρεθεί η προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της συνάρτησης $f \in X_5$, στον P_2 όπου $X_5=\{0,1,2,3,4\}$

x_i	0	1	2	3	4
f_i	0	1	2	1	0

μέσω ορθογωνίων πολυωνύμων

ΛΥΣΗ

α' τρόπος: (Δίχως αναδρομικό τύπο). Έχουμε το Π.Ε.Τ:

$q^*(x)=\lambda_0 P_0(x)+\lambda_1 P_1(x)+\lambda_2 P_2(x) \in P_2$

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x-\frac{(x,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0(x)=$$

$$=x-\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cancel{P_0(x_i)}^{\,1}}{\sum_{i=1}^{5}\cancel{(P_0(x_i))^2}^{\,1}}\cdot \cancel{P_0(x)}^{\,1}=x-\frac{1+2+3+4}{5}=x-2.$$

$$P_2(x)=x^2-\frac{(x^2,P_0)}{(P_0,P_0)}P_0(x)-\frac{(x^2,P_1)}{(P_1,P_1)}P_1(x)=$$

$$=x^2-\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2\cdot \cancel{P_0(x_i)}^{\,1}}{5}\cdot 1-\frac{\sum_{i=1}^{5} x_i^2(x_i-2)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-2)^2}\cdot(x-2)=$$

$$=x^2-\frac{1+4+9+16}{5}-\frac{1(1-2)+\cancel{4(2-2)}^{\,0}+9(3-2)+16(4-2)}{(0-2)^2+(1-2)^2+\underbrace{(2-2)^2}_{0}+(3-2)^2+(4-2)^2}(x-2)=$$

$$=x^2-6-\frac{-1+9+32}{4+1+1+4}(x-2)=x^2-6-\frac{40}{10}(x-2)=x^2-4x+2.$$

Άρα, έχουμε ότι:

$$\lambda_0=\frac{(f,P_0)}{(P_0,P_0)}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f(x_i)}{5}=\frac{1+2+1}{5}=\frac{4}{5}.$$

$$\lambda_1=\frac{(f,P_1)}{(P_1,P_1)}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f(x_i)P_1(x_i)}{10}=\frac{1\cdot(1-2)+\cancel{2(2-2)}^{\,0}+1(3-2)}{10}=0.$$

$$\lambda_2=\frac{(f,P_2)}{(P_2,P_2)}=\frac{\sum_{i=1}^{5} f(x_i)\cdot P_2(x_i)}{\sum_{i=1}^{5}(P_2(x_i))^2}=\frac{1\cdot(1-4+2)+2(4-8+2)+1(9-12+2)}{2^2+(1-4+2)^2+(4-8+2)^2+(9-12+2)^2+2^2}=$$

$$=\frac{-1-4-1}{4+1+4+1+4}=-\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}.$$

Άρα, $\varphi^*(x)=\frac{4}{5}-\frac{3}{7}(x^2-4x+2)=-\frac{3}{7}x^2+\frac{12}{7}x-\frac{2}{35}$

Β' τρόπος (Με αναδρομικό τύπο) Έχουμε Π.Ε.Τ.

$$q^*(x) = \lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \lambda_2 P_2(x) \in \mathbb{P}_2.$$

Αναδρομική σχέση: $P_{k+1}(x) = (x - a_k) P_k(x) - \beta_k P_{k-1}(x)$ (1)

όπου $\alpha_k = \dfrac{(xP_k, P_k)}{(P_k, P_k)}$ και $\beta_k = \dfrac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)}$, $P_0 = 1$.

και όπως στον α' τρόπο λύσης: $P_1(x) = x - 2$.

Για να υπολογίσουμε το P_2, έχουμε:

για $k = 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} P_2(x) = (x - a_1) P_1(x) - \beta_1 P_0(x)$, όπου:

$$a_1 = \frac{(xP_1, P_1)}{(P_1, P_1)} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i [P_1(x_i)]^2}{\sum_{i=1}^{5} [P_1(x_i)]^2} = \frac{1\cdot(1-2)^2 + 2(2-2)^2 + 3(3-2)^2 + 4(4-2)^2}{10} = 2$$

$$\beta_1 = \frac{(P_1, P_1)}{(P_0, P_0)} = \frac{10}{5} = 2.$$

Άρα, $P_2(x) = (x-2)(x-2) - 2 \cdot 1 = x^2 - 4x + 2$.

και όμοια βρίσκουμε τα $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$.

Η μόνη διαφορά με πριν είναι ο υπολογισμός των πολυωνύμων πέρα από τα P_0, P_1

Εφαρμογή (Θεωρητική)

Αν q_1^*, q_2^* Π.Ε.Τ των $f_1, f_2 \in C[a,b]$ στον $\mathbb{P}_n$, τότε ποια η ΠΕΤ της $\alpha f_1 + \beta f_2$ στον $\mathbb{P}_n$, α, β: σταθ.;

ΛΥΣΗ

$(f_1 - q_1^*, p) = 0 = (f_2 - q_2^*, p)$, $\forall p \in \mathbb{P}_n$ (αφού είναι ΠΕΤ)

$\Rightarrow \alpha(f_1 - q_1^*, p) + \beta(f_2 - q_2^*, p) = 0 \Leftrightarrow (\alpha(f_1 - q_1^*) + \beta(f_2 - q_2^*), p) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha f_1 + \beta f_2 - (\alpha q_1^* + \beta q_2^*), p) = 0$, $\forall p \in \mathbb{P}_n \Rightarrow \alpha q_1^* + \beta q_2^* \in \mathbb{P}_n$

είναι η ΠΕΤ της $\alpha f_1 + \beta f_2$ στον $\mathbb{P}_n$.